

14 Ιουνίου 2017

Εξέταση στο Μάθημα : Ειδικά Θέματα Γεωμετρίας (822) ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

(Ο τρισδιάστατος Χώρος IR^3 θεωρείται εφοδιασμένος με το κανονικό του εσωτερικό γινόμενο . Όταν γράφουμε για έναν αυθαίρετο διανυσματικό χώρο θα εννοούμε έναν οποιονδήποτε διανυσματικό χώρο πεπερασμένης ή άπειρης διάστασης)

Θέμα 1^ο (3 μονάδες)

Θεωρούμε το επίπεδο Π του τρισδιάστατου χώρου IR^3 που παράγεται από τα διανύσματα $v=(1,1,-1)$ και $w=(1,-1,1)$.

Θεωρούμε ακόμα το σημείο $P=(1,1,1)$ του χώρου .

α) Να ευρεθούν δυο διανύσματα a, b του χώρου που να ικανοποιούν τα εξής :

$a+b=P$, το b να είναι κάθετο στο επίπεδο Π και το a να ανήκει στο Π .

(2 μονάδες)

β) Να υπολογιστεί η απόσταση του P από το Π . (1 μονάδα)

Θέμα 2^ο (4 μονάδες)

Θεωρούμε έναν αυθαίρετο διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο (V, \langle , \rangle) .

Έστω a, b να είναι δυο διανύσματα του V τέτοια ώστε : $\|a\| = 1$, $\|b\| = 3$, $\langle a, b \rangle = -2$.

α) Δείξτε ότι τα a, b είναι γραμμικά ανεξάρτητα . (1 μονάδα)

β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\langle 2a-3b, 3a+2b \rangle$. (1 μονάδα)

γ) Δώστε ένα (οποιοδήποτε) παράδειγμα τέτοιων διανυσμάτων a και b στον χώρο IR^2 , όταν τον θεωρούμε εφοδιασμένο με το κανονικό του εσωτερικό γινόμενο .

(1 μονάδα)

δ) Να βρείτε (αν υπάρχει) ένα διάνυσμα που να έχει μήκος 1 , να ανήκει στο επίπεδο που ανήκουν τα a, b και να είναι κάθετο στο b .

Αν υπάρχει τέτοιο διάνυσμα να το εκφράσετε σαν συνάρτηση των a και b στην γενική περίπτωση καθώς και στην περίπτωση του προηγούμενου θέματος 2° γ) (1 μονάδα).

Θέμα 3° (2 μονάδες)

Δίνεται η καμπύλη του επιπέδου IR^2 με καρτεσιανή εξίσωση :

$7x^2 + 4xy + 4y^2 - 8 = 0$. Να προσδιορίσετε τι είδους καμπύλη παριστάνει και να βρείτε τα βασικά χαρακτηριστικά της .

Θέμα 4° (5 μονάδες)

Δίνεται η καμπύλη του επιπέδου IR^2 με καρτεσιανή εξίσωση:

$x^2 + 2xy + y^2 + x - y = 0$. Να προσδιορίσετε τι είδους καμπύλη παριστάνει και να βρείτε τα βασικά χαρακτηριστικά της .

Θέμα 5° (3 μονάδες) (Θεωρητική άσκηση)

Δίνεται ένας αυθαίρετος διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο (V, \langle , \rangle) .

α) Να δείξετε ότι για κάθε υπόχωρο πεπερασμένης διάστασης W του V ισχύει :

Ο Χώρος V είναι το ευθύ άθροισμα του W και του ορθογωνίου συμπληρώματος του W .

(1 μονάδα)

β) Θεωρούμε ένα τυχόν επίπεδο Π του τρισδιάστατου χώρου IR^3 που περνά από την αρχή των αξόνων . Δείξτε ότι υπάρχει μια ευθεία του χώρου που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στο Π . Δείξτε ακόμα , ότι μια τέτοια ευθεία είναι και η μοναδική .

Να περιγράψετε ακόμα (χωρίς απόδειξη) πως κατασκευάζεται αυτή η μοναδική κάθετος στο Π σαν συνάρτηση του Π και μιας οποιαδήποτε ορθοκανονικής βάσης του Π .

(1 μονάδα)

(Υπόδειξη : Χρησιμοποιήστε το α)) .

γ) Θεωρούμε ένα τυχόν επίπεδο Π του τρισδιάστατου χώρου IR^3 που περνά από την αρχή των αξόνων και ένα σημείο P του χώρου που δεν ανήκει στο Π . Να δώσετε τον ορισμό της

απόστασης $d(P, \Pi)$ του σημείου P από το επίπεδο Π και να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα σημείο A του επιπέδου Π του οποίου η απόσταση από το P είναι ίση με $d(P, \Pi)$.

Να αποδείξετε ότι το σημείο A είναι μοναδικό. Να περιγράψετε (χωρίς απόδειξη) πως υπολογίζονται τα A και $d(P, \Pi)$ σαν συνάρτηση των Π, P και μιας τυχούσας ορθοκανονικής βάσης του Π . **(1 μονάδα)**

Σημειώσεις :

α) Στο 5^ο θέμα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε , χωρίς απόδειξη , τις εξής 7 προτάσεις που τις θεωρούμε γνωστές από την Γραμμικά Άλγεβρα :

1) Σε ένα αυθαίρετο διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο , η τομή δυο κάθετων υποσυνόλων του χώρου είναι το κενό σύνολο ή το μονοσύνολο $\{0\}$.

2) Το ορθογώνιο συμπλήρωμα ενός μη κενού υποσυνόλου ενός αυθαίρετου διανυσματικού χώρου με εσωτερικό γινόμενο είναι διανυσματικός υπόχωρος του χώρου .

3) Η διάσταση του ευθέως αθροίσματος δυο διανυσματικών υπόχωρων πεπερασμένης διάστασης ενός αυθαίρετου διανυσματικού χώρου ισούται με το άθροισμα των διαστάσεων των δύο χώρων .

4) Σε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης , ο μοναδικός υπόχωρός του που έχει διάσταση ίση με την διάσταση όλου του χώρου είναι ο ίδιος ο χώρος .

5) Κάθε διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης με εσωτερικό γινόμενο έχει μια ορθοκανονική βάση .

6) Ο τρισδιάστατος χώρος \mathbb{R}^3 έχει διάσταση 3 .

7) Θεωρούμε γνωστό το πυθαγόρειο θεώρημα σε έναν αυθαίρετο διανυσματικό χώρο με εσωτερικό γινόμενο .

Οποιοδήποτε άλλο ισχυρισμό χρησιμοποιήσετε στο (5^ο θέμα) θα πρέπει να τον αποδείξετε (εκτός βέβαια αν είναι ιδιότητα κάποιου ορισμού) .

β) Στο τρίτο και στο τέταρτο θέμα δεν χρειάζεται να δικαιολογήσετε τα διάφορα βήματα και να κάνετε επαλήθευση . Πρέπει όμως να τα γράψετε με καθαρότητα και σαφήνεια . Επίσης στο τρίτο και τέταρτο θέμα ταυτίζουμε τον χώρο \mathbb{R}^2 με το σύνολο των πινάκων 1×2 με συντελεστές από το σώμα των πραγματικών αριθμών .

γ) Στα υπόλοιπα θέματα μπορείτε να χρησιμοποιείτε , ελεύθερα , προτάσεις της θεωρίας, χωρίς απόδειξη .